energy method の入口

1 導入

このページの核心は、PDE の解を点ごとに追跡するのではなく、領域全体の積分量として制御することである。

2 用語と定義

energy method は、解や微分の二乗積分をエネルギーとして定義し、その時間変化を評価する方法である。

3 方針

波動方程式では運動と歪みのエネルギーが保存される。熱方程式では二乗積分が減衰する。積分による評価は、明示解がなくても有効である。

4 接続

energy method では部分積分や Green 公式が反復して現れる。境界条件が境界項を消去する役割を持つ。

5 波動方程式の例

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$、$u(0,t) = u(L,t) = 0$ とする。エネルギーを

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)\,dx$$

と定義する。$E'(t)$ を計算し、部分積分と境界条件を使用すると、$E'(t) = 0$ となる。これは明示解を使用せずに保存量を得る方法である。

計算は次の通りである。

$$E'(t) = \int_0^L (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt})\,dx$$

方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ を代入すると、

$$E'(t) = c^2 \int_0^L (u_t u_{xx} + u_x u_{xt})\,dx$$

である。第一項を部分積分すると、

$$\int_0^L u_t u_{xx}\,dx = [u_t u_x]_0^L - \int_0^L u_{tx} u_x\,dx$$

となる。固定端では $u(0,t) = u(L,t) = 0$ なので端点で $u_t = 0$ となり、境界項は消える。残る二つの積分は打ち消し合うため、$E'(t) = 0$ である。

6 熱方程式の例

$u_t = \kappa u_{xx}$、$u(0,t) = u(L,t) = 0$ とする。$\int_0^L u^2\,dx$ を時間微分すると、

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u^2\,dx = -2\kappa\int_0^L u_x^2\,dx \le 0$$

を得る。熱では二乗積分が減衰し、波ではエネルギーが保存される。この差が方程式の性質を示す。

導出は

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u^2\,dx = 2\int_0^L uu_t\,dx = 2\kappa\int_0^L uu_{xx}\,dx$$

から始まる。部分積分により

$$2\kappa\int_0^L uu_{xx}\,dx = 2\kappa[uu_x]_0^L - 2\kappa\int_0^L u_x^2\,dx$$

である。Dirichlet 条件では境界項が 0 になるため、減衰評価が得られる。

7 外力がある場合

比較例として $u_{tt} = c^2u_{xx} + F(x,t)$ を考える。この場合、

$$E'(t) = \int_0^L F(x,t)u_t(x,t)\,dx$$

となり、エネルギーは保存されない。右辺は外力が系へ注入する仕事率を表す。energy method は保存だけでなく、増加や減衰を不等式で制御する枠組みでもある。

8 どこまで成り立つか

非線形 PDE では、エネルギーが閉じた評価を与えるとは限らない。散逸・保存・外力の有無を確認する必要がある。

9 関連リンク

→ 講義 **Green・Gauss・Stokes の定理** lecture math vector-calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/vector-calculus/Green・Gauss・Stokes の定理-講義/